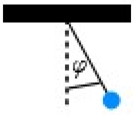
Matroids Matheplanet

Von d´Alembert zu Lagrange II

Von: KingGeorge

Datum: Fr. 22. Februar 2008 10:37:47
Thema: Physik



Von d´Alembert zu Lagrange II

Ist ein statisches System im Gleichgewicht, d.h. die totale Kraft $\vec{F}_i^{(t)}$ auf jedes Teilchen ist Null, dann ergibt sich für eine virtuelle (infinitesimale) Verschiebung $\delta\vec{r}_i$ der Teilchen, daß die virtuelle Arbeit $\vec{F}_i^{(t)}\cdot\delta\vec{r}_i$ Null ist. Die Summe dieser Produkte ist dann selbstverständlich auch Null.

(1) $$\sum_i \vec{F}_i^{(t)}\cdot\delta\vec{r}_i = 0$$

Zerlegt man die totale Kraft $\vec{F}_i^{(t)}$ in die äußere Kraft $\vec{F}_i$ und in die Zwangskraft $\vec{Z}_i$, so wird aus **(1)**

(2) $$\sum_i \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{Z}_i\cdot\delta\vec{r}_i = 0$$

Herrscht Reibungsfreiheit vor, dann sind die Zwangskräfte senkrecht zur Verschiebung, und damit ist das skalare Produkt $\vec{Z}_i\cdot\delta\vec{r}_i = 0$. Für reibungsbehaftete Systeme gilt dies nicht, und deshalb sind sie von den nachfolgenden Überlegungen erst einmal ausgeschlossen. Beschränkt man sich also auf Systeme, für welche die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte Null ist, ergibt sich aus **(2)** das sogenannte **Prinzip der virtuellen Arbeit**:

(3) $$\sum_i \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = 0$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit so wie es oben beschrieben wird, gilt nur für die Statik. Um es auf die Dynamik zu übertragen, benutzen wir die Bewegungsgleichung.

$$\vec{F}_i^{(t)} = \frac{d}{dt}\vec{p}_i \Leftrightarrow \vec{F}_i^{(t)} - \frac{d}{dt}\vec{p}_i = 0$$

Sie sagt aus, daß ein dynamisches System unter Einwirkung der totalen Kraft $\vec{F}_i^{(t)}$ plus einer ''Trägheitskraft'' $-\frac{d}{dt}\vec{p}_i$ im Gleichgewicht ist. Hier führt, genau wie beim Prinzip der virtuellen Arbeit, eine Zerlegung der totalen Kraft in eine äußere Kraft $\vec{F}_i$ und eine Zwangskraft $\vec{Z}_i$, unter Berücksichtigung von $\vec{Z}_i\cdot\delta\vec{r}_i = 0$, unmittelbar zum **Prinzip von d'Alembert**:

(4) $$\sum_i \left(\vec{F}_i - \frac{d}{dt}\vec{p}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0$$

Führt man generalisierte Koordinaten q_j ein, dann läßt sich der Ortsvektor $\vec{r}_i$ eines jeden Massenpunktes als

$\vec{r}_i = \vec{r}_i\,(q_1\,,\,q_2\,,\,\ldots\,,\,q_n\,,\,t)$

darstellen, und für eine virtuelle Verschiebung $\delta\,\vec{r}_i$, die ja unabhängig von der Zeit ist, ergibt sich

$$\textbf{(5)}\qquad \delta\,\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j}\,\vec{r}_i\;\delta q_j$$

Die virtuelle Arbeit der Kraft $\vec{F}_i$ ergibt sich damit zu

$$\textbf{(6)}\qquad \sum_i \vec{F}_i\cdot\delta\,\vec{r}_i = \sum_{i,j}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial}{\partial q_j}\,\vec{r}_i\;\delta q_j = \sum_j Q_j\;\delta q_j$$

wobei $Q_j = \sum_i \vec{F}_i\cdot\frac{\partial}{\partial q_j}\,\vec{r}_i$ die **generalisierte Kraft** ist.

(Q_j hat nicht zwangsläufig die Dimension einer Kraft. Aber $Q_j\cdot\delta q_j$ hat immer die Dimension einer Arbeit)

Für den zweiten Term aus **(4)** ergibt sich mit **(5)**

$$\textbf{(7)}\qquad \sum_i \frac{d}{dt}\,\vec{p}_i\cdot\delta\,\vec{r}_i = \sum_{i,j}\frac{d}{dt}\left(m_i\,\vec{v}_i\right)\cdot\frac{\partial}{\partial q_j}\,\vec{r}_i\;\delta q_j$$

Durch Ableiten unter Beachtung der Produktregel läßt sich die Beziehung

$$\sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i\,\vec{v}_i\right)\cdot\frac{\partial}{\partial q_j}\,\vec{r}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i\,\vec{v}_i\cdot\frac{\partial}{\partial q_j}\,\vec{r}_i\right) - m_i\,\vec{v}_i\cdot\frac{d}{dt}\,\frac{\partial}{\partial q_j}\,\vec{r}_i$$

überprüfen, und man erhält aus **(7)** mit

$$\vec{v}_i = \frac{d}{dt}\,\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j}\,\vec{r}_i\;\dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t}\,\vec{r}_i \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\,\vec{v}_i = \frac{\partial}{\partial q_j}\,\vec{r}_i \quad \text{und}$$

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial}{\partial q_j}\,\vec{r}_i = \frac{\partial}{\partial q_j}\,\frac{d}{dt}\,\vec{r}_i = \frac{\partial}{\partial q_j}\,\vec{v}_i$$

$$\textbf{(8)}\qquad \sum_i \frac{d}{dt}\,\vec{p}_i\cdot\delta\,\vec{r}_i = \sum_{i,j}\left(\frac{d}{dt}\left(m_i\,\vec{v}_i\cdot\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\,\vec{v}_i\right) - m_i\,\vec{v}_i\cdot\frac{\partial}{\partial q_j}\,\vec{v}_i\right)\delta q_j$$

Mit Beachtung der Kettenregel und Identifizierung von $\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}$ mit der kinetischen Energie T_i wird

$$\frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \vec{v}_i\right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}\right) \quad \text{zu} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T_i$$

und

$$m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{v}_i = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}\right) \quad \text{zu} \quad \frac{\partial}{\partial q_j} T_i$$

Da $\sum_i T_i$ der gesamten kinetischen Energie T des Systems entspricht, läßt sich **(8)** als

$$\textbf{(9)} \qquad \sum_i \frac{d}{dt} \vec{p}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T - \frac{\partial}{\partial q_j} T \qquad \text{darstellen.}$$

Es ergibt sich also mit **(6)** und **(9)** aus dem Prinzip von d'Alembert **(4)**

$$\textbf{(10)} \qquad \sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T - \frac{\partial}{\partial q_j} T - Q_j\right) \delta q_j = 0$$

Für holonome Zwangsbedingungen sind die δq_j unabhängig voneinander und frei wählbar. Die Summe ist deshalb nur dann Null, wenn der Term in der Klammer Null ist. Somit erhält man n Gleichungen der Form

$$\textbf{(11)} \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T - \frac{\partial}{\partial q_j} T = Q_j$$

Lassen sich die Kräfte aus einer skalaren Potentialfunktion $V = V\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t\right)$ derart herleiten, daß

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} V \qquad \text{gilt,}$$

dann ergibt sich für die generalisierte Kraft

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{r}_i = -\sum_i \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} V \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{r}_i = -\frac{\partial}{\partial q_j} V$$

Dies eingesetzt in **(11)** führt zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) = 0$$

Da V geschwindigkeitsunabhängig ist, kann man dafür auch

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T - V) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - V) = 0$$ schreiben, und mit der Definition

der **Lagrange-Funktion** $\mathcal{L} = T - V$

ergeben sich letztendlich n **Lagrange-Gleichungen**

(12) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

Dieselben Differentialgleichungen erhält man auch aus dem Eulerschen Variationsprinzip, wenn man dort für die Funktion f die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ einsetzt. Die Herleitung der Bewegungsgleichungen aus dem Variationsprinzip nennt man das Prinzip der kleinsten Wirkung oder auch Prinzip von Hamilton.