Systeme von Skalen, gebildet aus einer Oktave, die in 12 gleiche Schritte eingeteilt ist.

Die Naturtonreihe, die aus Grund- und Oberschwingungen einer schwingenden Saite entsteht, teilt die Oktave in 5 Ganz- und 2 Halbtonschritte ein. Diese Ganztonschritte lassen sich in jeweils zwei Halbtonschritte teilen. Werden die so entstehenden 12 Halbtonschritte, deren Frequenzverhältnisse alle in guter Näherung um den Wert $\sqrt[12]{2}$ schwanken, durch diesen Wert ersetzt, so erhält man eine Einteilung der Oktave in 12 gleiche Schritte – die Grundlage der „Temperierten Stimmung".
Im Folgenden soll nun theoretisch untersucht werden, wie viele Skalen sich aus dieser Einteilung der Oktave ergeben. Dazu wird unterschieden in Systeme und deren Modi. Die Systeme werden nach der Anzahl von Tönen pro Oktave unterschieden. Dabei stellt sich im Verlauf meiner Überlegungen heraus, dass der musikalisch häufigste Fall - die Systeme mit 7 Tönen innerhalb einer Oktave - 462 Modi erzeugt. Ebenso viele ergeben sich für 6 Töne pro Oktave. Wegen der großen musikalischen Relevanz wird mit den Systemen mit 7 Tönen pro Oktave begonnen. Auf die Betrachtung des trivialen Falls mit 0 Tönen pro Oktave wird verzichtet.

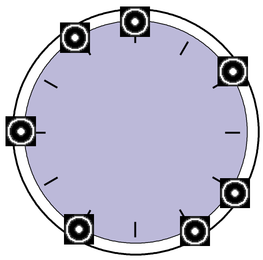
Es sollen also die folgenden Fragen untersucht werden:

- Wie viele verschiedene Systeme mit 7 Tönen aus 12 Halbtönen gibt es?
- Wie viele verschiedene Systeme mit 1 - 12 Tönen aus 12 Halbtönen gibt es?
- Wie viele Modi können insgesamt gebildet werden?

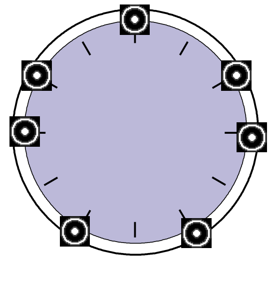
Systeme von Skalen, die 7 Töne aus einer Oktave, die in 12 gleiche Schritte eingeteilt ist, enthalten.

Das verbreitetste System der genannten Art ist das System der „Natural Modes" (Kirchentonarten). Das System basiert auf der ionischen Tonleiter mit der ihr eigenen Lage der Halbtöne. Es ist hier so gezeichnet, dass der Grundton des ionischen Modus oben ist:

*System **1***



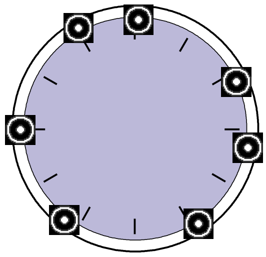
Ein solches System gleicht einem runden Tisch mit 12 nicht unterscheidbaren Plätzen, an dem 7 nicht unterscheidbare Personen sitzen. Dreht man es um zwei Halbtöne nach links, so steht der Grundton des dorischen Modus oben:



Wie man sieht, ist es dasselbe System, es wurde lediglich gedreht. Dreht man es weiter, entstehen alle 7 „Natural Modes" (Kirchentonleitern).

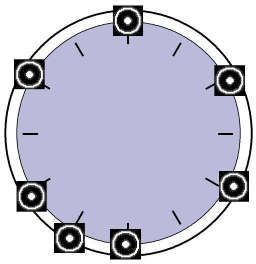
Ein weiteres, sehr verbreitetes System basiert auf melodisch Moll:

*System **2***



Es erzeugt die im Jazz üblichen „Artificial Modes“, wenn seine 7 Töne jeweils als Grundtöne betrachtet werden.
Neben den genannten Systemen gibt es nur noch ein System, das nur aus Ganz- und Halbtonschritten besteht, also keine kleinen Terzen oder größere Intervalle enthält:

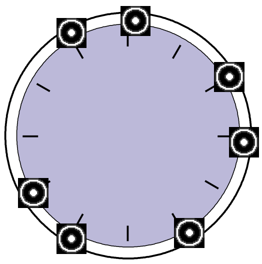
*System **3**:*



Es entspricht der in der Jazzimprovisation in mixolydischen Zusammenhängen häufig verwendeten Ganztonleiter mit hinzugefügter reiner Quinte.

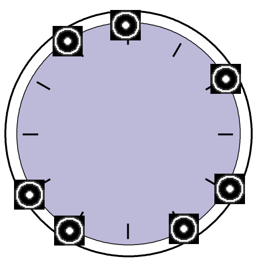
Systeme mit einer kleinen Terz (übermäßigen Sekunde)
Das bekannteste System, das eine kleine Terz enthält, basiert auf Harmonisch Moll. Auch dieses System erzeugt im Jazz „Artificial Modes“:

*System **4***



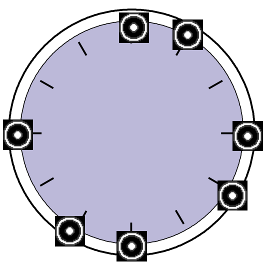
Eine der Leitern des folgenden Systems wird gelegentlich als Harmonisch Dur bezeichnet:

*System **5***

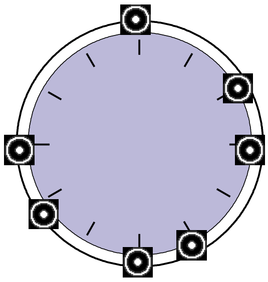


Hier die übrigen Systeme, die eine kleine Terz enthalten:

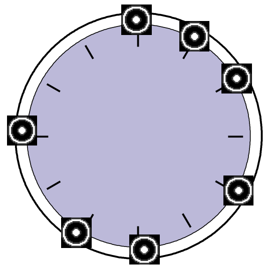
*System **6***



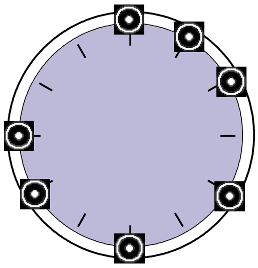
System 7



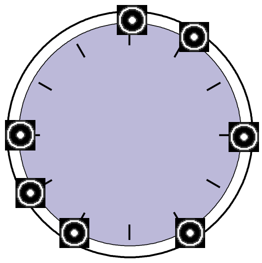
*System **8***



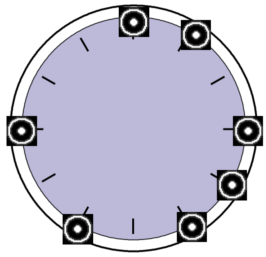
*System **9***



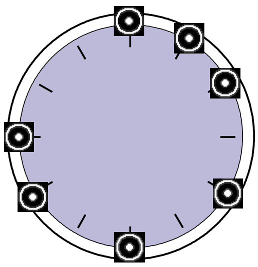
*System **10***



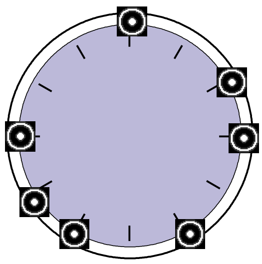
*System **11***



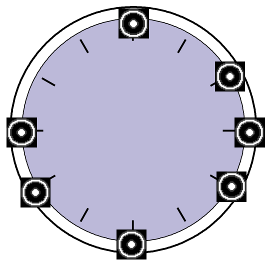
*System **12***



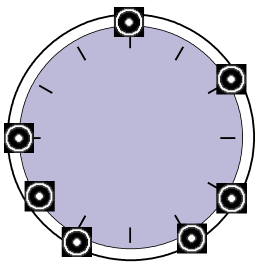
*System **13***



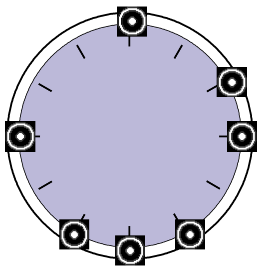
*System **14***



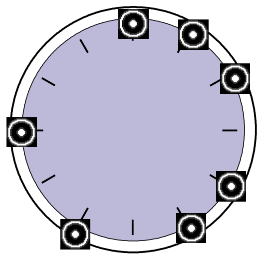
*System **15***



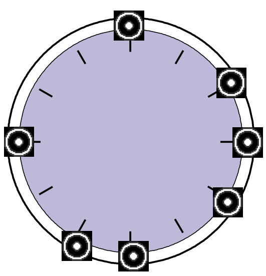
*System **16***



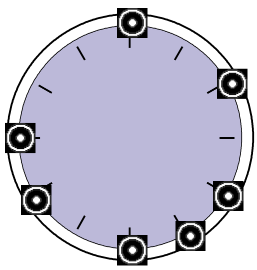
*System **17***



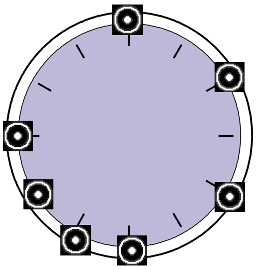
*System **18***



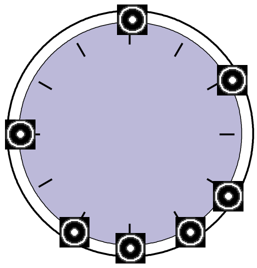
*System **19***



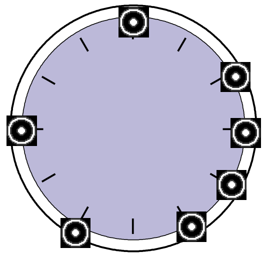
*System **20***



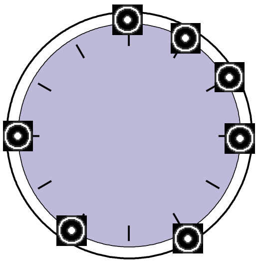
*System **21***



*System **22***

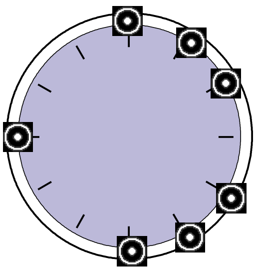


*System **23***

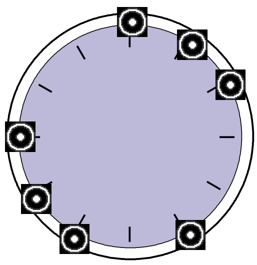


Hier die Systeme, die **zwei** kleine Terzen enthalten***:***

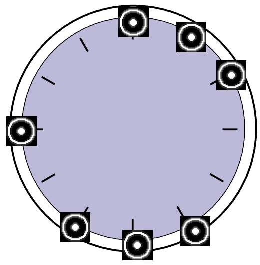
*System **24***



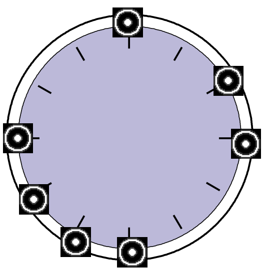
*System **25***



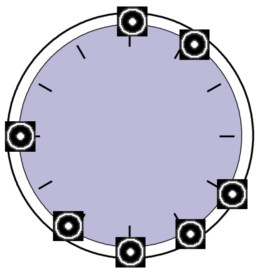
*System **26***



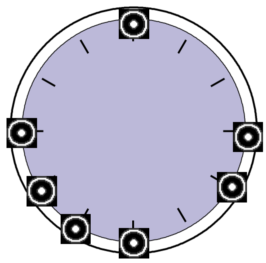
*System **27***



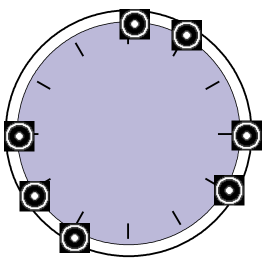
*System **28***



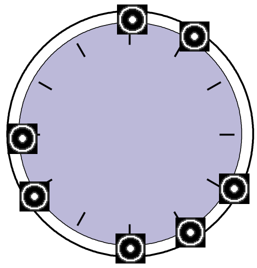
*System **29***



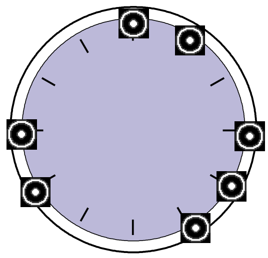
*System **30***



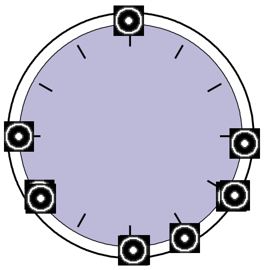
*System **31***



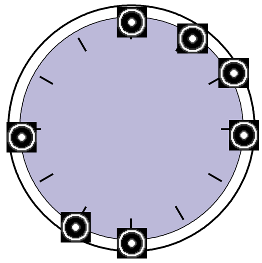
*System **32***



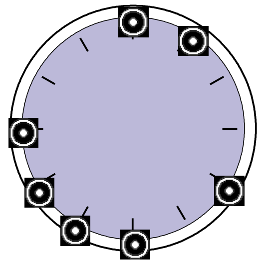
System ***33***



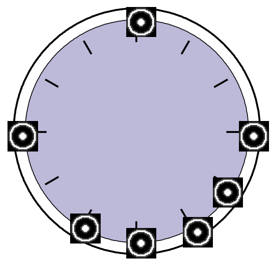
System ***34***



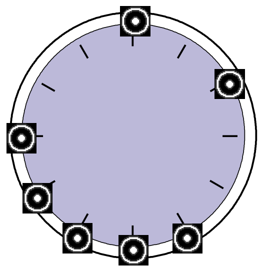
System ***35***



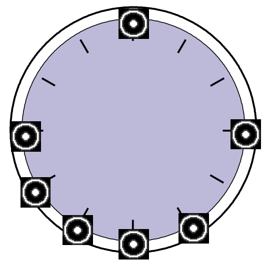
System ***36***



System ***37***

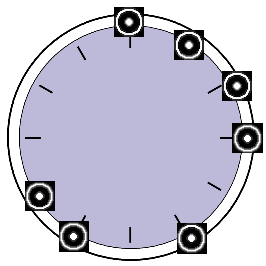


System ***38***

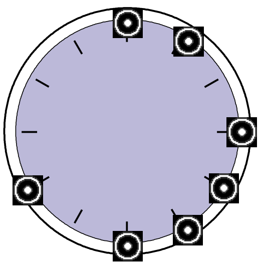


Hier die Systeme, die eine **große** Terz enthalten:

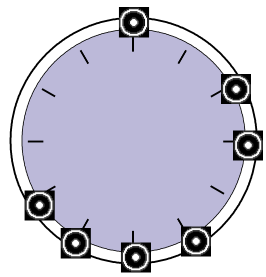
System ***39***



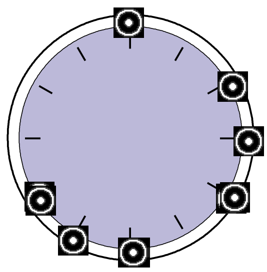
System ***40***



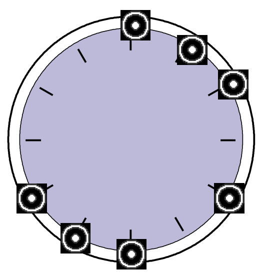
System ***41***



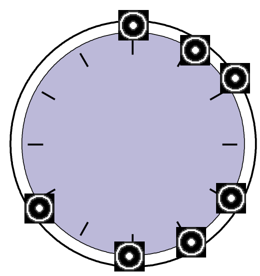
System ***42***



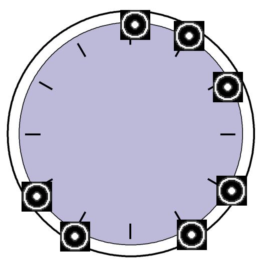
System ***43***



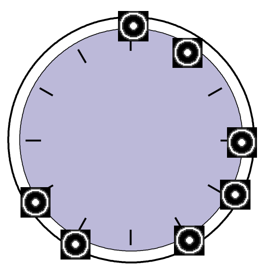
System ***44***



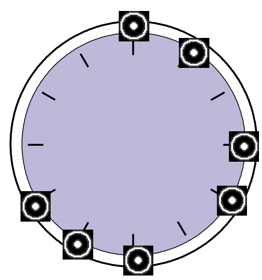
System ***45***



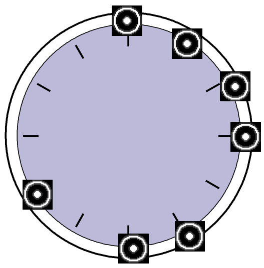
System ***46***



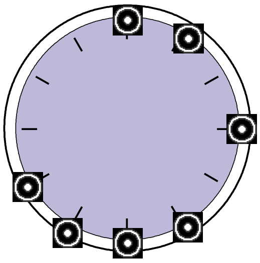
System ***47***



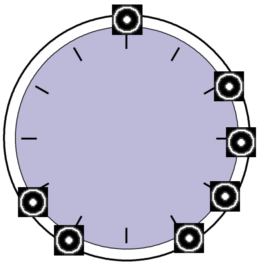
System ***48***



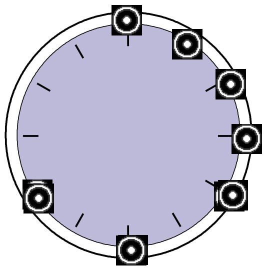
System ***49***



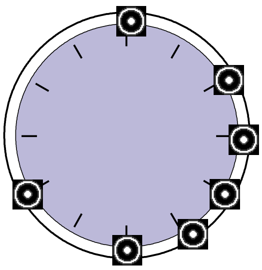
System ***50***



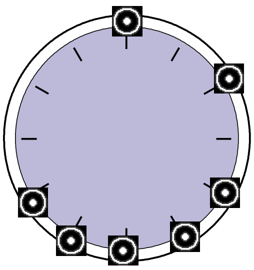
System ***51***



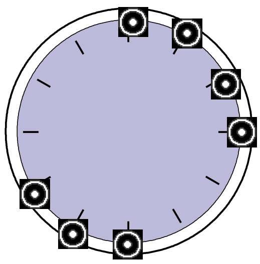
System ***52***



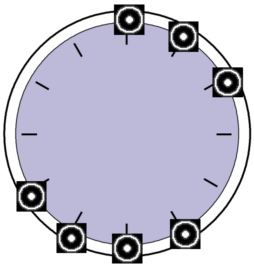
System ***53***



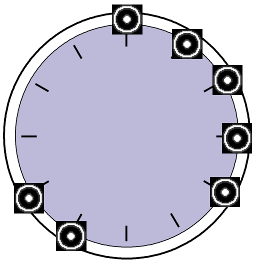
System ***54***



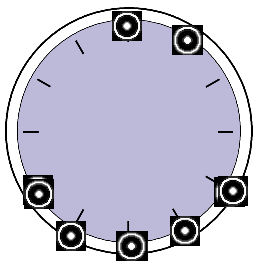
System ***55***



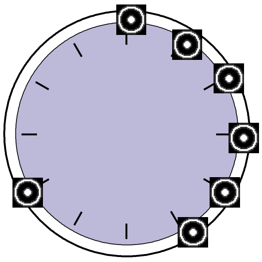
System ***56***



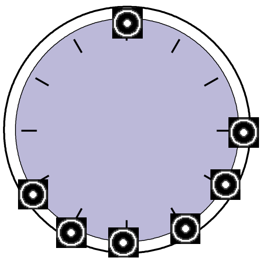
System ***57***



System ***58***

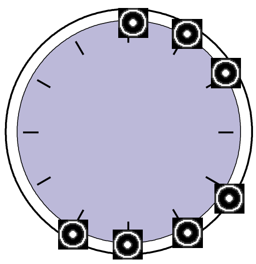


System ***59***

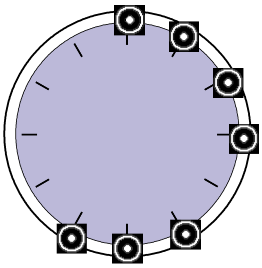


Hier die Systeme, die eine Quarte enthalten:

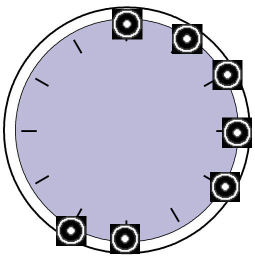
System ***60***



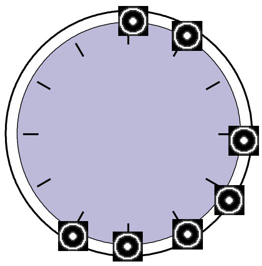
System ***61***



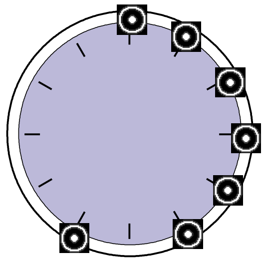
System ***62***



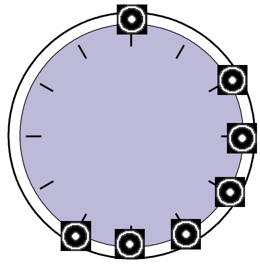
System ***63***



System ***64***

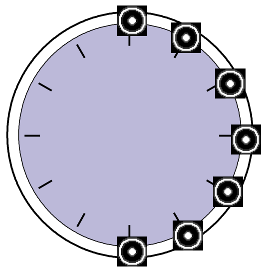


System ***65***



Und schließlich das einzige System, das eine verminderte Quinte enthält:

System ***66***



Es gibt also, völlig in Einklang mit der mathematischen Theorie, die allerdings nur gilt, wenn die Anzahl n der Tonschritte pro Oktave und die Anzahl k der Töne der Skala teilerfremd sind,

$$\frac{1}{n}\binom{n}{k} = \frac{12!}{7!\;5!} \cdot \frac{1}{12} = 66$$

66 mögliche Systeme, die musikalisch von sehr unterschiedlicher Bedeutung sind. Eine große Anzahl von Systemen und damit von Modi ergibt sich bei Skalen, die in 12 gleiche Schritte unterteilt sind, nur für Systeme mit 5,6 oder 7 Tönen.

Hier die per Computer [1.] berechnete Anzahl Modi bei Systemen mit 1 -12 Tönen pro Oktave:

Anzahl Töne	**Anzahl Systeme**	**Anzahl Modi pro System**	**gesamte Anzahl Modi (unkorrigiert)**
1	1	1	1
2	6	2	12
3	19	3	57
4	43	4	172
5	66	5	330
6	80	6	480
7	**66**	**7**	**462**
8	43	8	344
9	19	9	171
10	6	10	60
11	1	11	11
12	1	12	12

Interessant ist, dass der musikalisch sehr relevante Fall mit 7 Tönen pro Oktave **scheinbar** weniger Modi als der musikalisch unbedeutendere Fall mit 6 Tönen pro Oktave anbietet.

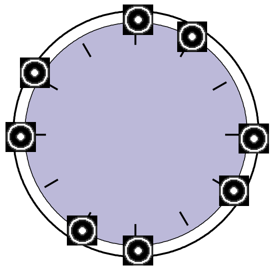
Gesamtzahl der Systeme
Es gibt also insgesamt $80 + 2 \cdot 66 + 2 \cdot 43 + 2 \cdot 19 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 1 = 350$ Systeme bei einer Unterteilung der Oktave in 12 gleiche Schritte.

Gesamtzahl der Modi
Diese lässt sich nun leider **nicht** durch Addition der rechten Spalte ermitteln:

$1 + 12 + 57 +172 + 330 + 480 + 462 + 344 + 171 + 60 + 11 = 2100$

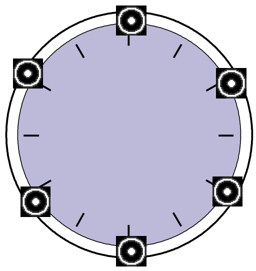
Das liegt daran, dass Systeme mit 2 bzw. 10 aus 12 Tönen, 3 bzw. 9 aus 12 Tönen, 4 bzw. 8 aus 12 Tönen und 6 aus 12 Tönen auch Modi bilden, die sich nicht unterscheiden. In der Jazztheorie werden diese Modi als „Symmetrische Skalen" bezeichnet. Dies soll hier an zwei Beispielen gezeigt werden:

1. Beispiel: Ein System mit 8 aus 12 Tönen, im Jazz bekannt als Halbton-Ganztonleiter:



Wie man sieht, erzeugt dieses System nur **zwei Modi**, den auf der 12-Uhr-Position beginnenden und den auf der 1-Uhr-Position (im Jazz bekannt als Ganzton-Halbtonleiter).
Die Modi, die auf der 3-Uhr-Position und den folgenden beginnen, sind mit den ersten zwei Modi identisch, da die hier entstehenden Tonleitern die gleichen Folgen von Ganz- und Halbtönen aufweisen.

2. Beispiel: Ein System mit 6 aus 12 Tönen, im Jazz bekannt als Ganztonleiter:



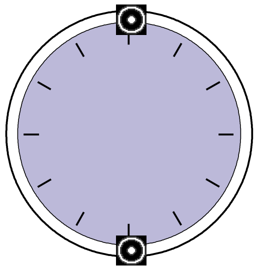
Wie man sieht, erzeugt dieses System nur **einen Modus**, da die entstehende Tonleiter stets die gleichen Schritte aufweist.

Diese Phänomen tritt bei Systemen mit 7 aus 12 (oder 5 aus 12) nicht auf, da 7 und 12 (oder 5 und 12) teilerfremd sind, also keinen gemeinsamen Teiler aufweisen. Im Folgenden wird versucht, die **tatsächliche Anzahl Modi** zu bestimmen.

Rotationssymmetrische Modi

<u>Bei 2 aus 12 Tönen:</u>

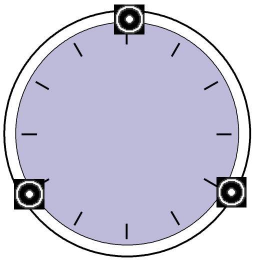
System 1/2



(ein Modus, statt zwei)

<u>Bei 3 aus 12 Tönen:</u>

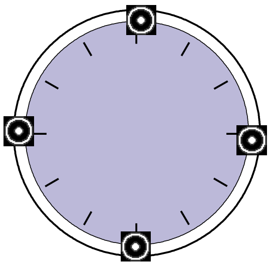
System 1/3



(ein Modus statt drei)

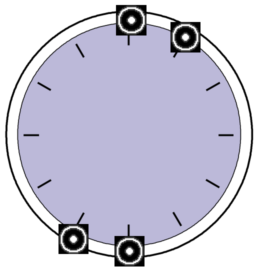
<u>Bei 4 aus 12 Tönen:</u>

System 1/4



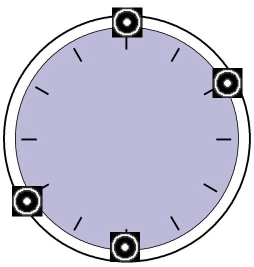
(ein Modus)

System 2/4



(zwei Modi)

System 3/4



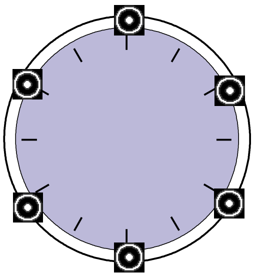
(zwei Modi)

System ***1/4*** entspricht dem völlig vermindertem Akkord

<u>Bei 5 aus 12 Tönen</u>, den **Pentatoniken** gibt es keine rotationssymmetrischen Modi.

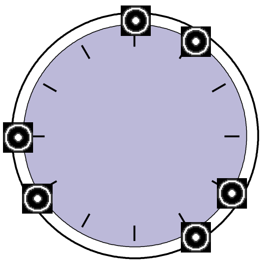
<u>Bei 6 aus 12 Tönen:</u>

System 1/6



(ein Modus statt sechs)

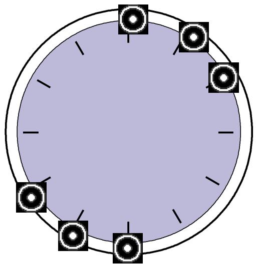
System 2/6



(zwei Modi statt sechs)

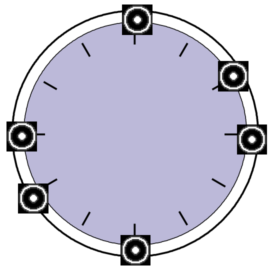
Die bereits erwähnte Ganztonleiter

System 3/6



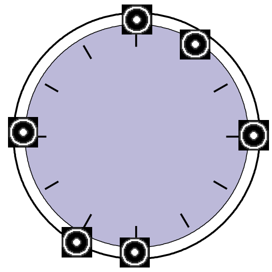
(drei Modi)

System 4/6



(drei Modi)

System 5/6

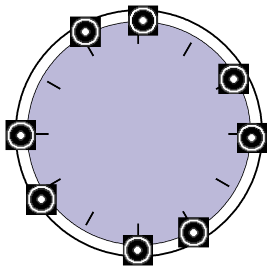


(drei Modi)

Bei 7 aus 12 Tönen gibt es keine rotationssymmetrischen Modi.

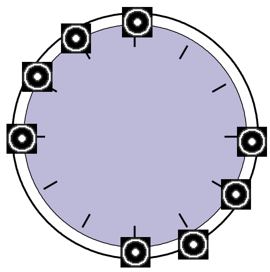
Bei 8 aus 12 Tönen

System 1/8



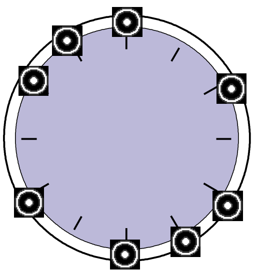
(zwei Modi)

System 2/8



(vier Modi)

System 3/8

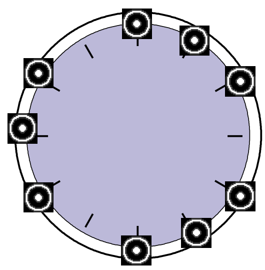


(vier Modi)

System ***1/8*** ist die bereits erwähnte Halbton-Ganztonleiter

Bei 9 aus 12 Tönen

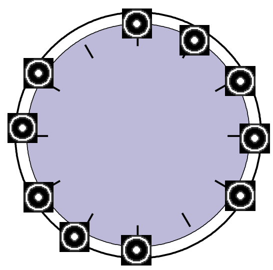
System 1/9



(drei Modi)

Bei 10 aus 12 Tönen

System 1/10



(fünf Modi)

Hier die tatsächliche Anzahl Modi bei Systemen mit 1 – 12 Tönen pro Oktave

Anzahl Töne	**Anzahl Systeme**	**Anzahl Modi pro System**	**gesamte Anzahl Modi (unkorrigiert)**	**Wegen Symmetrie fehlende Modi**	**korrigierte Anzahl Modi**
1	1	1	1	0	1
2	6	2	12	1	11
3	19	3	57	2	55
4	43	4	172	7	165
5	66	5	330	0	330
6	80	6	480	18	462
7	**66**	**7**	**462**	**0**	**462**
8	43	8	344	14	330
9	19	9	171	6	165
10	6	10	60	5	55
11	1	11	11	0	11
12	1	12	12	11	1
			Summen:	**49**	**2048**

Die Summe der Modi entspricht also der Zahl 2^{11}.

Gesamtzahl der Modi
Nun lässt sich die Zahl der Modi durch Addition der rechten Spalte ermitteln:
1 + 11 + 55 + 165 + 330 + 462 + 462 + 330 + 165 + 55 + 11 + 1 = **2048**
Es gibt also 2048 Modi von Systemen, die aus einer Oktave, die nach dem Prinzip der „Temperierten Stimmung“ in 12 gleiche Schritte eingeteilt ist, gebildet werden können. Natürlich sind diese Modi von musikalisch völlig unterschiedlicher Bedeutung.

Probe
Dass die Summe der Modi 2048 beträgt, ist ein wichtiger Hinweis darauf, dass alle rotationssymmetrischen Systeme berücksichtigt wurden, da die **Summe** der korrigierten Anzahl der Modi auf wesentlich einfachere Art berechnet werden kann:
Jede Skala mit k Tönen aus n Halbtönen pro Oktave beginnt mit dem Grundton. Es verbleiben also so viele Möglichkeiten, wie es eben gibt, die k Töne auf den n - 1 Plätzen anzuordnen. Für alle Möglichkeiten für k von 0 bis 11 gibt das: 2^{11}.

Gesamtzahl der Skalen
Jeder Modus kann in 12 Tonarten gespielt werden. Es gibt also bei der Unterteilung der Oktave in 12 gleiche Schritte 12 · 2048 **= 24576** mögliche Skalen.

Ich danke meinen KollegInnen Helga Krüger, Gerhard Zobel, Jens Rindermann und Thomas Pfisterer aus der Fachschaft M/Ph für ihre tatkräftige fachliche Unterstützung.
Vielen Dank an Christoph Menzel für die Korrektur und das vergessene symmetrische System.

Herbert Siebler

Quellen:
[1.] Berechnung der Anzahl Systeme: *http://theory.cs.uvic.ca/gen/neck.html*